

## RİYAZİYYAT

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА  
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХС.С.МИРЗОЕВ, Н.М.СУЛЕЙМАНОВ  
Бакинский Государственный Университет  
mirzoyevsabir@mail.ru, nicat\_suleyman@yahoo.com

В работе получены достаточные условия, которые обеспечивают существование и единственности регулярного решения одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Эти условия выражены свойствами коэффициентов данных уравнений. При этом получены оценки норм операторов промежуточных производных в пространствах типа Соболева. Эти оценки связываются условиями разрешимости уравнений.

**Ключевые слова.** Операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, регулярное решение, самосопряжённый оператор.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  операторно-дифференциальное уравнение  $n = 2m$ -го порядка

$$(1)^m \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + (1)^m \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial y^n} + \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}}^n A_{k, j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} = f(x, y),$$

$$(x, y) \in R^2, \quad (1)$$

где  $R^2 = R \times R$ ,  $R = (\infty; +\infty)$ . Здесь  $A$  -положительно-определённый самосопряжённый оператор в  $H$ , а  $A_{k, j}$  – линейные, вообще говоря, неограниченные операторы в  $H$ ,  $u(x, t)$  и  $f(x, t)$  функции, определённые в  $R^2$  почти всюду со значением в  $H$ .

Обозначим через  $L_2(R^2, H)$  гильбертово пространства всех функций, определённых почти всюду в  $R^2$  со значениями в  $H$ , измеримых, квадратично интегрируемых по Бохнеру, для которых [1]

$$\|f\|_{L_2(R^2, H)} = \left( \int_{R^2} \|f(x, y)\|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Через  $D(R^2, H_n)$  обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций  $u(x, t)$  со значениями в  $H_n = D(A^n)$ , имеющие компактные носители в  $R^2$ . В линейном множестве  $D(R^2, H_n)$  определим норму

$$\|u\|_{W_2^n(R^2, H)} = \left( \|A^n u\|_{L_2(R^2, H)}^2 + \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|_{L_2(R^2, H)}^2 + \left\| \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \right\|_{L_2(R^2, H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Пространства  $D(R^2, H_n)$  с нормой  $\|u\|_{W_2^n(R^2, H)}$  является пред гильбертовым пространством, пополнение которого обозначим  $W_2^n(R^2, H)$ .

**Определение 1.** Если при  $f(x, y) \in L_2(R^2, H)$  существует функция  $u(x, y) \in W_2^n(R^2, H)$ , которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в  $R^2$ , то её будем называть регулярным решением.

**Определение 2.** Если при любом  $f(x, y) \in L_2(R^2, H)$  существует регулярное решение  $u(x, y)$ , для которого имеет место оценки

$$\|u\|_{W_2^n(R^2, H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R^2, H)},$$

то уравнения (1) будем называть регулярно разрешимым.

В данной работе мы найдём условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярно разрешимость уравнения (1). Эти условия выражены свойствами коэффициентов уравнения (1). Отметим, что в одномерном случае регулярно разрешимость некоторых уравнений исследована в работе [2]. При  $n = 2$  разрешимость уравнения (1) и некоторые краевые задачи исследованы в работах [3-6]. А при  $n = 4$  регулярно разрешимость уравнения (1) рассмотрены в работах [7-8].

Обозначим через

$$P_0 u = (-1)^m \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^n} + (-1)^m \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^n} + A^n u, \quad u \in W_2^n(R^2, H)$$

$$P_1 u = \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} A_{k, j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}, \quad P u = P_0 u + P_1 u, \quad u \in W_2^n(R^2, H)$$

Сперва доказывается:

**Теорем 1.** Пусть  $A$ -положительно-определённый самосопряжённый оператор в  $H$ . Тогда оператор  $P_0$  изоморфно отображает пространства  $W_2^n(R^2, H)$  на  $L_2(R^2, H)$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x, y) \in L_2(R^2, H)$  а  $\hat{f}(\xi, \eta)$  есть её преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

$$\text{Обозначим через } \hat{u}(\xi, \eta) = \left( (\xi^n + \eta^n)E + A^n \right)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta).$$

Очевидно, что

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \hat{u}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнений  $P_0 u = f$ . Теперь покажем, что  $u(x, y) \in W_2^n(R^2, H)$ .

По теореме Планшереля

$$\left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)}^2 = \left\| A^{n-(k+j)} \xi^k \eta^j \hat{u}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)}^2$$

Очевидно, что при  $k, j = 0$

$$\begin{aligned} \left\| A^n \hat{u}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} &\leq \left\| A^n (\xi^n + \eta^n + A^n)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \\ &\leq \sup_{(\xi, \eta) \in R^2} \left\| A^n (\xi^n + \eta^n + A^n)^{-1} \right\| \cdot \left\| \hat{f}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \|f(x, y)\|_{L_2(R^2, H)}, \end{aligned}$$

поскольку при  $(\xi, \eta) \in R^2$  имеет место неравенства

$$\left\| A^n (\xi^n E + \eta^n E + A^n)^{-1} \right\| \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^n (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq 1.$$

Аналогично имеем:

$$\left\| \xi^n \hat{u}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \|f(x, y)\|_{L_2(R^2, H)}$$

$$\left\| \eta^n \hat{u}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \|f(x, y)\|_{L_2(R^2, H)}.$$

Таким образом,  $u(x, y) \in W_2^n(R^2, H)$ . С другой стороны при  $f = 0$  получаем что,  $u = 0$ , т.е.  $\text{Ker} P_0 = \{0\}$ . Так как

$$\left\| P_0 u \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \text{const} \|u\|_{W_2^n(R^2, H)},$$

то утверждение теоремы следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

При получении условия разрешимости уравнения (1) важную роль играют оценки промежуточных производных. Имеет место,

**Теорема 2.** Пусть  $A$ -положительно определённый самосопряжённый оператор. Тогда при любом  $u(x, y) \in W_2^n(R^2, H)$  имеет места неравенства

$$\left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq c_{k,j} \|P_0 u\|_{L_2(R^2, H)}, \quad k, j = \overline{0, n}, \quad 0 \leq k + j \leq n, \quad (2)$$

где  $c_{0,0} = 1$ ,  $c_{k,0} = c_{k,n} = c_{j,0} = c_{j,n} = 1$ ,  $c_{k,0} = d_{n,k} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k}{n}}$

при  $k = \overline{1, n-1}$ ;  $c_{0,j} = \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{\frac{n-j}{n}}$  при  $j = \overline{1, n-1}$ ;

$c_{k,j} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}}$  при  $k + j = n (k \neq 0, n; j \neq 0, n)$ ;

$c_{k,j} = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \left(\frac{n-(k+j)}{n}\right)^{\frac{n-(k+j)}{n}}$  при  $1 \leq k + j \leq n-1$

**Доказательство.** По теореме 1 при  $u \in W_2^n(R^2, H)$  существует  $f \in L_2(R^2, H)$ , такое, что  $P_0 u = f$ . Тогда по теореме Планшареля

$$\begin{aligned} \left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} &= \left\| A^{n-(k+j)} \xi^k \eta^j \hat{u}(x, y) \right\|_{L_2(R^2, H)} = \\ &= \left\| A^{n-(k+j)} (\xi^n E + \eta^n E + A^n)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \\ &\leq \left\| A^{n-(k+j)} (\xi^n E + \eta^n E + A^n)^{-1} \right\| \cdot \|f\|_{L_2(R^2, H)} \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны при любом  $(\xi, \eta) \in R^2$  имеет место неравенство

$$\left\| A^{n-(k+j)} (\xi^n E + \eta^n E + A^n)^{-1} \right\| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^{n-(k+j)} (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \equiv \varphi_{n,k,j}(\xi, \eta).$$

Очевидно, что при  $k = 0, j = 0$ ,

$\varphi_{n,0,0}(\xi, \eta) = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^n (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq 1$ . Аналогично имеем, что

$$\varphi_{n,n,0}(\xi, \eta) = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^n (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq 1 \text{ и}$$

$$\varphi_{n,0,n}(\xi, \eta) = \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^n (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq 1 \text{ т.е. неравенство (2) верно при}$$

$k = j = 0, j = 0, k = n$  и  $k = 0, j = n$ . Пусть теперь  $j = 0, k = \overline{1, n-1}$  тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k,n}(\xi, \eta) &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^{n-k} \xi^k (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^{n-k} \xi^k (\xi^n + \mu^n)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{|\xi| \geq 0 \\ \mu}} \left| \tau^{n-k} (1 + \tau^n)^{-1} \right| = \left( \frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{n-k}{n} \right)^{\frac{n-k}{n}} = d_{n,k} = c_{n,k,0} \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что  $c_{n,0,j} = \varphi_{n,0,j} = \left( \frac{j}{n} \right)^{\frac{j}{n}} \left( \frac{n-j}{n} \right)^{\frac{n-j}{n}}$  при  $j = \overline{1, n-1}$

Теперь рассмотрим случай  $k + j = n; k \neq 0, n; j \neq 0, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k,j}(\xi, \eta) &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \eta^j \xi^k (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right| = \\ &= d_{n,k} = \left( \frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{n-k}{n} \right)^{\frac{n-k}{n}} = \left( \frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{j}{n} \right)^{\frac{j}{n}} = c_{k,j}. \end{aligned}$$

Теперь считаем, что  $1 \leq k + j \leq n-1$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k,j}(\xi, \eta) &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left\| \mu^{n-(k+j)} \eta^j \xi^k (\xi^n + \eta^n + \mu^n)^{-1} \right\| = \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \frac{\xi^k}{\mu^k} \cdot \frac{\eta^j}{\mu^j} \left( \left( \frac{\xi}{\mu} \right)^n + \left( \frac{\eta}{\mu} \right)^n + 1 \right)^{-1} \right| \leq \sup_{\substack{|\xi| \geq 0, \tau_1 = \frac{|\xi|}{\mu} \\ |\eta| \geq 0, \tau_2 = \frac{|\eta|}{\mu}}} \left| \tau_1^k \tau_2^j (\tau_1^n + \tau_2^n + 1)^{-1} \right| \end{aligned}$$

Так как функция  $\alpha(\tau_1, \tau_2) = \tau_1^k \tau_2^j (\tau_1^n + \tau_2^n + 1)^{-1}$  принимает максимальное значение при  $\tau_1 = \left( \frac{k}{n-(k+j)} \right)^{\frac{1}{n}}, \tau_2 = \left( \frac{j}{n-(k+j)} \right)^{\frac{1}{n}}$  равным  $c_{k,j} = \left( \frac{k}{j} \right)^{\frac{k}{n}} \left( \frac{j}{n} \right)^{\frac{j}{n}} \left( \frac{n-(k+j)}{n} \right)^{\frac{n-(k+j)}{n}}$ ,

то  $\varphi_{n,k,j} \leq c_{k,j}$ .

Используя все эти оценки в неравенство (3) мы получаем утверждение теоремы.

Теперь докажем основную теорему работы.

**Теорема 3.** Пусть  $A$  -положительно-определённый самосопряжённый оператор, операторы  $B_{k,j} = A_{k,j} A^{(k+j)-n}$  ограничены в  $H$  и имеет место неравенство

$$q = \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} c_{k,j} \|B_{k,j}\| < 1$$

где числа  $c_{k,j}$  определены из теоремы 2. Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Доказательство. Пусть выполняются условия 1) и 2). Тогда оператор  $P_0$  изоморфно отображает пространство  $W_2^n(R^2, H)$  на  $L_2(R^2, H)$ . Очевидно, что оператор  $P_1$  также ограниченный оператор из пространства  $W_2^n(R^2, H)$  в  $L_2(R^2, H)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|P_1 u\|_{L_2(R^2, H)} &= \left\| \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} \|A_{k,j} A^{(k+j)-n}\| \cdot \\ &\cdot \left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} \|A_{k,j} A^{(k+j)-n}\| \cdot \|P_0 u\|_{L_2(R^2, H)} \leq \\ &\leq \text{const} \|P_0 u\|_{L_2(R^2, H)}^2 \leq \text{const} \|u\|_{W_2^n(R^2, H)}^2 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнению (1) можем написать в виде

$$Pu = P_0 u + P_1 u = f \quad \text{где } u \in W_2^n(R^2, H), \text{ а } f \in L_2(R^2, H)$$

Тогда, обозначив  $P_0 u = \omega$ , получаем уравнению

$$\omega = P_1 P_0^{-1} \omega = f \quad (4)$$

в пространстве  $L_2(R^2, H)$ . Так как  $P_0^{-1}$  есть изоморфизм, то при любом  $\omega \in L_2(R^2, H)$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2(R^2, H)} &= \|P_1 u\|_{L_2(R^2, H)} = \left\| \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} \|A_{k,j} A^{(k+j)-n}\| \cdot \\ &\cdot \left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2, H)} \leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} \|B_{k,j}\| \cdot c_{k,j} \|P_0 u\|_{L_2(R^2, H)} = \\ &\sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} c_{k,j} \|B_{k,j}\| \cdot \|\omega\|_{L_2(R^2, H)} = q \|\omega\|_{L_2(R^2, H)} \end{aligned}$$

По условию теоремы  $q < 1$ . Тогда оператор  $(E + P_1 P_0^{-1})$  обратим в  $L_2(R^2, H)$ . Из уравнения (4) получаем, что  $\omega = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$ . Следовательно,  $u = P_0^{-1}(E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$ . Отсюда получаем, что  $\|u\|_{W_2^q(R^2, H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(R^2, H)}$ , Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложение. М.: Мир, 1971, 371с
2. Мирзоев С.С. «Вопросы разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений и некоторые спектральные задачи» автореферат докторской диссертации, 1993, Баку, 32 с.
3. Mirzoyev S.S., Jafarov I.J. On Solvability of One Boundary Value Problem for Second Order Operator Differential Equation // Transaction of NAS of Azerbaijan ser. of phys. tech. and math sciences , 2004, v.24, N.1, 177-186
4. Мирзоев С.С., Джафаров И.Дж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных // Математические заметки, 2012, т.91, N3, с. 470-472
5. Jafarov I.J. On Solvability of One Class of Partial Operator-Differential Equation» Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004, N1, pp. 136-146
6. Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.матем.наук, 1998, N3, с.94-101
7. Мирзоев С.С., Исмаилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциального уравнения в частных производных четвёртого порядка в гильбертовом пространстве // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.матем.наук, 2006, N4, с.5-11
8. Ismailova M.F. On Solvability of Fourth Order Operator-Differential Equations of Elliptic Type on Weight Spaces // Vekua Institute of Applied Mathematics, Javakhisvili Tbilisi State University, Georgian Academy of Sciences , 2009, v.13, pg.21-29

#### BİR SINIF XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, N.M.SÜLEYMANOV

#### XÜLASƏ

İşdə bir sinif yüksək tərtib xüsusi törəməli operator-diferensial tənliklərin rəqulyar həllinin varlığını və yeganəliyini təmin edən kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər verilən tənliyin operator əmsallarının xassələri ilə ifadə edilmişdir. Bununla yanaşı aralıq törəmə operatorlarının normaları müəyyən abstrakt Sobolev tipli fəzalarda qiymətləndirilmişdir. Bu qiymətləndirmələr həll olunma şərtləri ilə əlaqələndirilmişdir.

**Açar sözlər:** Operator diferensial tənliklər, Hilbert fəzası, öz-zöünə qoşma operator , xüsusi törəməli tənliklər.

**ON THE SOLVABILITY OF A CLASS OF PARTIAL  
OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION**

**S.S.MIRZAYEV, N.M.SULEYMANOV**

**SUMMARY**

In the work sufficient conditions are found for the existence and uniqueness of the regular solutions of a class of high order partial operator-differential equations. These conditions are expressed by the properties of the coefficients of the considered equation. The norms of the auxiliary derivative operators are estimated in the abstract Sobolev spaces. These norms are related with the solvability conditions.

**Key words:** Operator-differential equations, Hilbert spaces, self-adjoint operator, partial equations.

*Поступила в редакцию: 18.05.2015 г.*

*Подписано к печати: 18.06.2015 г.*